

Personalisierte Aufgaben mit Musterlösungen in Lua \LaTeX

Symbolisches Rechnen im \LaTeX -Dokument

Thomas Flinkow
`thomas.flinkow[at]gmx.de`

DANTE Herbsttagung
19. November 2022

Inhalt

1. Überblick
2. Symbolisches Rechnen
3. Randomisierung
4. Beispiele
5. Ausblick

Überblick – Motivation

- Erstellung von Lehrmaterialien in \LaTeX zeitintensiv
- insbesondere personalisierte Aufgaben mit Musterlösungen
- selbe Struktur und Schwierigkeit
- erhöhter Lerneffekt, weniger Plagiate
- Trennung von \LaTeX -Code und Berechnung

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Parabel $f(x) = \frac{x^2}{2}$ und der Geraden $g(x) = 4 + x$.

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Parabel $f(x) = 2x^2$ und der Geraden $g(x) = 4 - 2x$.

Überblick – Ziele

- (Teil)-Automatisierung der Erstellung

```
./create.sh main Aufgabenblatt-1 teilnehmer.csv
```

- wiederverwendbarer Aufgabenpool
- Rechnen direkt im \LaTeX -Dokument

```
Die Ableitung von  $f(x)=3\sin x^2$  ist  
 $\text{\sprint}{symcomp.diff("3*\sin(x^2)", "x")}$ .
```

Die Ableitung von $f(x) = 3 \sin x^2$ ist $6x \cos x^2$.

Verwandte Arbeiten – MATLAB

- Mathias Magdowski [Mag19]: automatisierte Erstellung von Aufgaben für die Elektrotechnik in MATLAB
- MAT_EX-Projekt [Hel+18]: kostenloses Webinterface
- aber: L_AT_EX ist nur noch Ausgabeformat
- wenig Kontrolle über das Dokument (MATLAB-Code anpassen)

```
clear all
fID = fopen('Aufgabe3.tex', 'wt');

%% Aufgabenstellung formulieren
Text = ['\\textbf{Aufgabe}: L\\\"osen Sie die Gleichung \\n \\[ \\n '];
fprintf(fID, Text)
```

Verwandte Arbeiten – Python

- weit verbreitete Bibliotheken für wissenschaftliches Rechnen
- SymPy (sympytex¹) und SageMath (sagetex²)
- Beispiel: $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx$ mit sagetex evaluieren:

```
\documentclass{article}
\usepackage{sagetex}

\begin{document}
  \[ \sage{integrate(exp(-x**2), (x, -oo, oo))} \]
\end{document}
```

- keine Trennung zwischen Berechnung und \LaTeX -Dokument
- zwei \LaTeX -Läufe bei Python-Codeänderungen

¹<https://ctan.org/pkg/sympytex>

²<https://ctan.org/pkg/sagetex>

Möglichkeiten von Lua \LaTeX nutzen

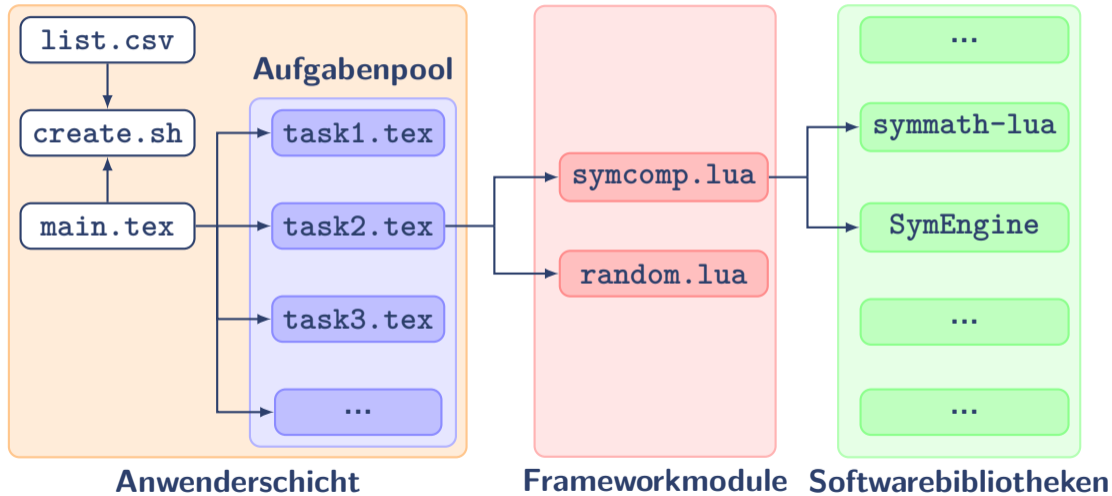
- Lua: simple Allzweck-Programmiersprache
- Standardbibliothek: grundlegende mathematische Funktionen (`math.sin`, `math.log`, ...)
- numerisches Rechnen nicht ausreichend
- Lua bietet C-Schnittstelle
- externe Bibliotheken für numerisches Rechnen [[Mon+14](#); [Vor21](#)]
- Idee: externe Bibliotheken für symbolisches Rechnen anbinden und in Lua \LaTeX verwenden

Überblick

- Bachelorarbeit [Fli21] an der Hochschule Ruhr West bei Prof. Dr. Jürgen Vorloeper
- Framework, d.h. vorgegebene Struktur, mehrere Komponenten
- Open-source (MIT Lizenz)³

³<https://github.com/tflinkow/individualised-assignments-latex>

Framework



Framework – Hauptdatei⁴

```
\documentclass[a4paper]{exam}
% ...
\begin{document}
Matrikelnummer: \directlua{tex.print(matriculationNumber)}\\
Name: \directlua{tex.print(firstName .. " " .. lastName)}

\begin{questions}
  \input{taskpool/task1}
  \input{taskpool/task2}
  \input{taskpool/task3}
  % ...
\end{questions}

\end{document}
```

⁴<https://github.com/tflinkow/individualised-assignments-latex/blob/main/document.tex>

Framework – Aufgabenpool⁵

```
\begin{luacode*}
  local template = {
    { "a", random.integer() },
    { "b", random.integer() }
  }

  f = random.create("a*x**3+b*x**2", template)
  d1 = symcomp.diff(f, "x")
  d2 = symcomp.diff(d1, "x")
\end{luacode*}
\question
Bestimmen Sie die ersten 2 Ableitungen der Funktion  $\text{\[f(x)=\sprint{f}\]}$ .
\begin{solution}
   $\text{\[f'(x)=\sprint{d1}, f''(x)=\sprint{d2}\]}$ 
\end{solution}
```

⁵https://github.com/tflinkow/individualised-assignments-latex/blob/main/taskpool/task_derivatives.tex

Rechnen im \LaTeX -Dokument – Anforderungen

- Operationen auf mathematischen Objekten ausführen

```
local f = symcomp.expr("sin((x^2)/2)")  
local df = symcomp.diff(f, "x")
```

- mathematische Ausdrücke jederzeit ins \LaTeX -Dokument ausgeben

```
\begin{equation*}  
  \odv{}{x} \sprint{f} = \sprint{df}  
\end{equation*}
```

$$\frac{d}{dx} \sin x^2 = 2x \cos x^2$$

Rechnen in \LaTeX -Dokument – Ansatz

- mathematische Objekte = Paare von Strings

```
local f = symcomp.expr("3*sin(x/2)")  
local f = { "3*sin(x/2)", "3*\sin\frac{x}{2}" }
```

- interne Repräsentation zum Rechnen (d.h. Interaktion mit externen Softwarebibliotheken)
- \LaTeX -Repräsentation zur Ausgabe ins \LaTeX -Dokument

Symbolisch Rechnen – Externe Bibliotheken

- insgesamt wenig open-source CAS für C/C++
- SymEngine⁶ (C++)
 - Ziel: performance-kritische Stellen von SymPy ersetzen
 - in Entwicklung, aber große Community
- symmath-lua⁷
 - vollständig in Lua implementiert
 - langsamer, aber symbolische Integration
- externe Bibliotheken sind abstrahiert und austauschbar

```
df = symcomp.diff("sin(x^2)", "x") -- SymEngine
F = symcomp.integrate(df, "x")     -- symmath-lua
```

⁶<https://github.com/symengine/symengine>

⁷<https://github.com/thenumbernine/symmath-lua>

Symbolisch Rechnen – C++⁸

```
extern "C" {
    static int diff(::lua_State* L) {
        auto var { ::luaL_checkstring(L, -1) };
        auto what { ::luaL_checkstring(L, -2) };

        return symcomp::Differentiate(what, var).ReturnToLua(L);
    }

    static const ::luaL_Reg functions[] = { {"diff", diff}, {NULL, NULL} };

    int luaopen_wsymengine(::lua_State* L) {
        ::luaL_newlib(L, functions);
        return 1;
    }
}
```

⁸<https://github.com/tflinkow/individualised-assignments-latex/blob/main/symcomp/wsymengine/wsymengine.cpp>

Randomisierung – Überblick

- Struktur vorgeben und parametrisieren:

```
local rules =  
{  
  { "a", random.integer() },  
  { "b", random.integer(-5, 5) }  
}  
  
local p = random.create("a*x^3+b*x^2", rules)
```

z.B Polynom $p(x) = ax^3 + bx^2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, -5 \leq b \leq 5$

- weitere Funktionen

```
local v = random.oneof({ "1/2*x", "2/3*x" })  
local f = random.polynomial(4)
```


Randomisierung – Vernünftige Grenzen

- optionale Parameter → sinnvolle Standardwerte!

```
-- random.integer([a [, b]])  
function random.integer(a, b)  
    return math.random(a or random.MIN_INT,  
                       b or random.MAX_INT)  
end
```

- standardmäßig MIN_INT == -10 und MAX_INT == +10

```
r = random.integer()      --> r in [-10, 10]  
r = random.integer(-15)  --> r in [-15, 10]  
r = random.integer(50, 150) --> r in [50, 150]
```

Beispiel – Eigenwerte

```
\begin{luacode*}
A = symcomp.matrix("[0, 1] [-2, -3]")
I2 = symcomp.identityMatrix(2)

lambdaI2 = symcomp.scalarMul("lambda", I2)
sub = symcomp.matrixSub(A, lambdaI2)
det = symcomp.det(sub)

ev = symcomp.eigenvalues(A)
\end{luacode*}

\question
Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix  $A$ .

\begin{solution}
Die charakteristische Gleichung  $\det(A - \lambda I_2) = 0$ 
 $\leftrightarrow$  ist
\begin{align*}
&0 = \det\left(\begin{matrix} A \\ \lambda I_2 \end{matrix}\right) \\
&0 = \det\left(\begin{matrix} \text{sub} \end{matrix}\right) \\
&0 = \det.
\end{align*}
Die beiden Eigenwerte sind
 $\lambda_1 = \text{ev}(1)$  and
 $\lambda_2 = \text{ev}(2)$ .
\end{solution}
```

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -36 & 9 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Zunächst berechnen wir $A - \lambda I_2$:

$$\begin{aligned} A - \lambda I_2 &= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -36 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.06 & 1.0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 - 1.0\lambda & -3.0 \\ -36.0 & 9 - 1.0\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Danach berechnen wir $\det(A - \lambda I_2)$.

$$\det(A - \lambda I_2) = -108.0 + (6 - 1.0\lambda)(9 - 1.0\lambda).$$

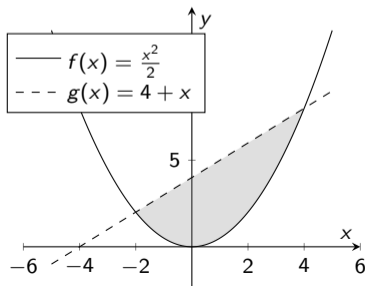
Nun lösen wir $\det(A - \lambda I_2) = 0$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 18$.

Beispiel – Kurvendiskussion

Aufgabe 1: Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Parabel $f(x) = 1/2x^2$ und der Geraden $g(x) = 4 + x$.

Lösung: Die Graphen der Funktionen f und g schneiden sich in $P_1 = (-2, 2)^T$ und $P_2(4, 8)^T$. Daher ist die Fläche zwischen den Schnittpunkten

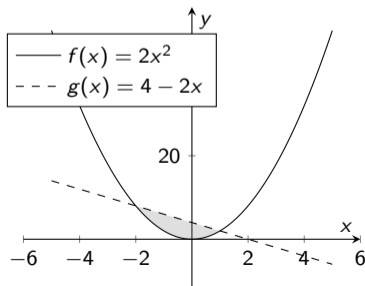
$$\int_{-2}^4 g(x) - f(x) dx = \left[\frac{1}{6}x(24 + 3x - x^2) \right]_{-2}^4 = 18.$$



Aufgabe 1. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Parabel $f(x) = 2x^2$ und der Geraden $g(x) = 4 - 2x$.

Lösung: Die Graphen der Funktionen f und g schneiden sich in $P_1 = (-2, 8)^T$ und $P_2(1, 2)^T$. Daher ist die Fläche zwischen den Schnittpunkten

$$\int_{-2}^1 g(x) - f(x) dx = \left[x^2(4 + x - \frac{2}{3}x^2) \right]_{-2}^1 = 9.$$



Nächste Schritte

- wohin mit den Dateien?
 - .tex (Aufgabenpool), .lua, .so (Frameworkmodule)
 - Abhängigkeiten?
- bisher nur unter Linux
- mehr Aufgabentypen → mehr Funktionen zum symbolischen Rechnen bereitstellen
- z.B. schrittweises Lösen linearer Gleichungssysteme
- Evaluation in der Lehre⁹
- luacas¹⁰ statt SymEngine und symmath-lua

⁹low-level Programmierung in C/C++ und Lua eher umständlich [Vor22]

¹⁰in Lua entwickeltes CAS; <https://ctan.org/pkg/luacas>

Literatur I

- [Fli21] Thomas Flinkow. “A Framework for Individualised Mathematical Assignments with Solutions in \LaTeX ”. Bachelorarbeit. Hochschule Ruhr West, Okt. 2021. URL: <https://github.com/tflinkow/individualised-assignments-latex/blob/main/thesis.pdf>.
- [Hel+18] Andreas Helfrich-Schkarbanenko u. a. *Mathematische Aufgaben und Lösungen automatisch generieren*. Springer Berlin Heidelberg, 2018. DOI: [10.1007/978-3-662-57778-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-57778-3).
- [Mag19] Mathias Magdowski. “Personalisierte Aufgaben und passende Musterlösungen zu den Grundlagen der Elektrotechnik automatisiert mit \LaTeX , pgfplots und CircuiTikZ erstellen”. In: *DTK* 31.4 (Dez. 2019), S. 34–44.

Literatur II

- [Mon+14] Juan I Montijano u. a. “Numerical methods with Lua \LaTeX ”. In: *TUGboat* 35.1 (2014), S. 51–56.
- [Vor21] Jürgen Vorloeper. “Numerisches Rechnen mit Lua \LaTeX ”. DANTE Frühjahrstagung. 11. März 2021. URL: https://dante.de/Vortraege_Tagungen/2021-Fruehjahr/JuergenVorloeper-RechnenLuaTeX.pdf.
- [Vor22] Jürgen Vorloeper. “Numerisches Rechnen mit Lua \LaTeX II: Anwendungen mit Python und pyluatex”. DANTE Sommertagung. 24. Juni 2022. URL: <https://dante.de/wp-content/uploads/2022/06/Vorloeper-NumerischesRechnen.pdf>.